COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Nota : Respecter strictement la numérotation des parties et des questions.

PARTIE I

Pour tout x réel strictement positif, on note : $\begin{cases} f(x,t)=\left(1+\dfrac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-t\sqrt{x}} & si \quad t>-\sqrt{x} \\ f(x,t)=0 & si \quad t\le -\sqrt{x} \end{cases}$

On rapelle que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,t)$. On notera $u(t)$ cette limite.

2°) a) Etudier les variations des fonctions : $t\to f(x,t)$.

b) Pour $t>-\sqrt{x}$, étudier les variations de la fonction :

$$t\to h_x(t)=\frac{1}{f(x,t)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t).$$

En déduire les positions relatives des courbes représentatives, dans un même repère, des fonctions $t\to f(x,t)$.

c) Etudier, pour tout t réel, le signe de $f(x,t)-u(t)$.

d) Dessiner, dans un même repère, les courbes représentatives des fonctions : $t\to u(t)$ et $t\to f(x,t)$.

3°) a) Soit A > 0. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sup\limits_{t\in[-A,A]}|f(x,t)-u(t)|\right]$.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dt$ converge.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)dt$.

4°) On note $\Gamma(u)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{u-1}e^{-t}dt$.

a) Quel est le domaine de définition de la fonction Γ ?

b) Montrer que : $\forall u>0,\ \Gamma(u+1)=u\Gamma(u)$

5°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{x}}$ et en déduire que $\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$ quand $x\to+\infty$.

PARTIE II

Soit $t_0 > 0$ et $f:[0,+\infty[\to \boldsymbol{R}$, continue, décroissante sur $[t_0,+\infty[$.

On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1°) Montrer que : $\forall t \geq t_0$, $f(t) \geq 0$.

2°) Montrer que : $\forall h > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(nh)$ converge.

3°) Montrer que : $\displaystyle\lim_{h\to 0,\, h>0}\left(h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

4°) Soit α un réel strictement positif.

a) Soit $g:\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ définie par : $\forall x > 0$, $g(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, $g(0) = 0$.

Déterminer : $\displaystyle\lim_{h\to 0,\, h>0}\left(h\sum_{n=0}^{+\infty} g(nh)\right)$.

b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{\alpha}x^n$.

c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha}x^n \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$ quand $x \to 1^-$.

PARTIE III

Soit α et β deux réels strictement positifs. On note :

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt.$$

1°) Montrer l'existence de $B(\alpha,\beta)$.

2°) Montrer que $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$ et que $B(\alpha+1,\beta)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

3°) On suppose dans cette question $\alpha>2$ et $\beta>2$.

On pose : $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$ pour $n\in N^*$.

a) Montrer qu'il existe $A>0$ tel que $\forall n\in N^*$, $|u_n-B(\alpha,\beta)|\leq\frac{A}{n}$.

b) On pose pour $x\in[0,1[$ et $s\in]1,+\infty[$, $g_s(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^{s-1}x^n$.

Montrer que : $\forall x\in[0,1[$, $\left|g_\alpha(x)g_\beta(x)-B(\alpha,\beta)g_{\alpha+\beta}(x)\right|\leq A\,g_{\alpha+\beta-1}(x)$.

c) Déduire de la partie II 4°) c) que : $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

4°) Montrer que le résultat de la partie III 3°) c) est vrai pour $\alpha>0$ et $\beta>0$.

5°) Déterminer un équivalent de $B(\alpha,\beta)$ quand $\alpha\to+\infty$.

PARTIE IV

1°) α et β désignant toujours deux réels strictement positifs, montrer que :

$$B(\alpha,\beta)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{2\beta-1}\theta\,d\theta\ .$$

2°) En déduire un équivalent de $\int_0^{\pi}\sin^x u\,du$ quand $x\to+\infty$.

3°) a) Déterminer un équivalent quand $k\to+\infty$, $k\in N$, de $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}t^{-\frac{3}{2}}|\sin t|^t\,dt$.

b) Soit $x\in R_+^*$, montrer la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty}t^{-\frac{3}{2}}|\sin t|^t\,dt$ et déduire de a) un équivalent de $\int_x^{+\infty}t^{-\frac{3}{2}}|\sin t|^t\,dt$ quand $x\to+\infty$.